

## Тема 19. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЗАИМООТНОШЕНИЙ «ХИЩНИК – ЖЕРТВА» И «ПАЗАРИТ – ХОЗЯИН»

**Объяснение.** Межвидовые взаимоотношения играют большую роль в динамике численности организмов в биоценозе. Хищники, уничтожая свои жертвы, влияют на их численность. Такое же воздействие оказывают и паразиты. Хищничество и сходное с ним явление паразитизма издавна вызывало у экологов интерес. Математическая модель, описывающая взаимодействия животных в системе паразит – хозяин и хищник – жертва была предложена А. Лоткой и В. Вольтеррой.

Сущность их выводов сводится к тому, что истребление особей хозяина паразитами является функцией численности не только паразитов, но и хозяев. Из этого следует, что той или иной численности хозяина соответствует определенная численность паразита и по мере возрастания плотности популяции хозяина увеличивается и плотность популяции паразита. Повышение же численности паразита приводит к снижению численности хозяина, а последнее опять снижает количество паразитов. И так, волна за волной, происходят периодические колебания численности популяций хозяина и паразита с небольшими отклонениями от оптимального уровня. Данная модель полностью соответствует модели взаимодействия хищника и его жертвы, приводящих к циклическим колебаниям численности в системе «хищник-жертва» рис. 8.

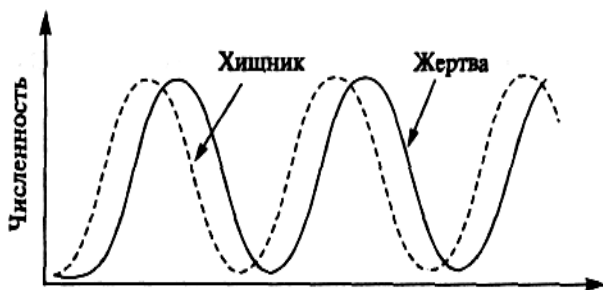


Рисунок 8 – Циклические колебания численности популяций хищника и жертвы.

Модель представляет собой систему из двух дифференциальных уравнений, вытекающих из уравнения логистического роста. Одно

из уравнений описывает скорость изменения популяции хищника, другое – его жертвы. Для некоторого ограниченного пространства, когда каждая из двух популяций имеет определенный уровень равновесия ( $K$ ), одновременный их рост можно выразить в следующей форме:

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left( \frac{K_1 - N_1 - \alpha N_2}{K_1} \right)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left( \frac{K_2 - N_2 - \beta N_1}{K_2} \right)$$

где  $N_1$  и  $N_2$  – численность популяции жертвы и хищника соответственно;

$\alpha$  и  $\beta$  – коэффициенты межвидовой конкуренции, характеризующие тормозящее влияние второго вида на первый и наоборот (коэффициенты конкуренции обычно меньше единицы);

$K_1$  и  $K_2$  – максимально возможная численность популяций при отсутствии конкуренции;

$r_1$  и  $r_2$  – биотические потенциалы.

Из уравнений следует, что подавляющее влияние каждой особи второго вида на популяцию первого равно  $\alpha/K_1$ , а первого на популяцию второго –  $\beta/K_2$ . Исход конкуренции зависит от относительных значений  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ . Различные их комбинации дают четыре варианта воздействия популяций друг на друга (табл. 20).

Пользуясь приведенными уравнениями, можно определить, какой должна быть плотность каждой популяции, чтобы другая не имела возможности увеличивать свою численность. Очевидно, что  $N_1$  не может возрастать при  $N_2 = K_1/\alpha$ , а когда  $N_1$  достигает величины  $K_2/\beta$ , не может увеличиваться  $N_2$ .

**Таблица 20 – Возможные варианты конкуренции, вытекающие из уравнений Лотки – Вольтерры**

Характер взаимоотношений	Варианты при условиях, что	
	вид 1 подавляет вид 2 ( $K_2/\beta < K_1$ )	вид 1 не подавляет вид 2 ( $K_2/\beta > K_1$ )
Вид 2 подавляет вид 1 ( $K_2/\alpha < K_1$ )	Каждый вид может подавлять друг друга (вариант 3)	Всегда побеждает вид 2 (вариант 2)
Вид 2 не подавляет вид 1 ( $K_2/\alpha > K_1$ )	Всегда побеждает вид 1 (вариант 1)	Ни один из видов не подавляет другой; устойчивое сосуществование (вариант 4)

**Задание:** построить модель изменения численности популяций хищника и жертвы или паразита и хозяина во времени, используя предложенные данные (табл. 21).

**Таблица 21 – Исходные данные**

Вариант	Показатели								
	$N_{01}$ (жертва – хозяин)	$N_{02}$ (хищник – паразит)	$r_1$	$r_2$	$\alpha$	$\beta$	$t$	$\Delta t$	$K_1,$ $K_2$
1	0,75	0,01	4,0	3,0	0,02	0,03	100	1	1
2	0,55	0,05	5,0	2,0	0,08	0,04			
3	0,83	0,15	3,5	2,5	0,04	0,03			
4	0,75	0,36	4,5	3,5	0,1	0,05			
5	0,91	0,73	4,0	3,0	0,03	0,05			
6	0,05	0,06	2,8	1,8	0,1	0,2			
7	0,68	0,97	25	3,0	0,07	0,1			
8	0,95	0,16	3,0	1,5	0,01	0,03			
9	0,42	0,12	2,5	50	0,2	0,02			
10	0,01	0,75	2,3	35	0,3	0,01			